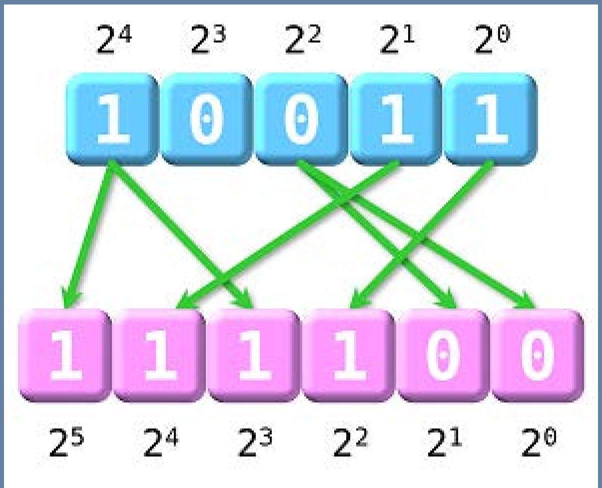
G: snowy bunny

問題概要

- M ビットの数を N ビットの数に変換する
- 変換結果の数の各ビットが元の数のどのビットに由来するか，で変換を定める
- 「ゆきうさぎ変換」



問題概要

- M ビットの数を N ビットの数に変換する
- 変換結果の数の各ビットが元の数のどのビットに由来するか，で変換を定める
- かっこいい数，かわいい数の集合 (AND, OR で閉じている) が与えられる
- かっこいい数がかわいい数にうつるような変換の個数を求めよ
- $1 \leq M \leq 10$, $1 \leq N \leq 6$

部分点

- 制約： $M \leq 4, N \leq 4$

- 変換は全部で M^N 通り
- 各変換に対して，かっこいい数すべてがかわいい数にうつるかを判定する
  - 適当に実装しても間に合うはず

考察

- すべての変換を調べても大丈夫そう
  - $M^N \leq 1{,}000{,}000$
  - 愚直な方法にちょっと工夫を足せばよさそう
- かっこいい数 (最大 2^M 個) すべてのうつる先を考えているのが無駄に見える

- 実はすべてのかっこいい数について確かめる必要がない

考察

- 以下をすべて含む集合 Z を考える
  - 0 がかっこいいとき，0
  - i ビット目 ($0 \le i < M$) が立っているかっこいい数が存在するとき，i ビット目が立っているかっこいい数すべての AND
    - AND で閉じているためこれもかっこいい数である
- かっこいい数全体はこれらに OR を用いで生成できる
  - 0 以外のかっこいい数は，立っている各ビットに対応する Z の元を OR すれば作れる

考察

- x_1, x_2 のうつる先がかわいい数であるとき，OR(x_1, x_2) のうつる先もかわいい数である
  - OR(x_1, x_2) は，OR((x_1 のうつる先), (x_2 のうつる先) にうつるため
- よって，Z の元のうつる先だけ調べればよい
- Z の大きさは高々 $M + 1$

計算量

- 普通に書くと $O(M^{N+2})$
- 定数倍によっては TLE するようです

- 変換を再帰で作りながら，Z の元のうつる先を少しずつ作っていく，などの工夫で $O(M^{N+1})$ にできる
- あるいはすべての数がかわいいとき M^N を答える，などの高速化を入れてもよい

背景

- 有限位相空間の連続写像の個数を数えよう，というアイデアでこの問題が生まれました
- 数学っぽさはなくなり，逆に慣れているとミスしやすい点も
  - ゆきうさぎ変換は写像の逆像であるため向きに注意
  - 空集合や全体が開集合に相当するものではない可能性がある

結果

- 総提出数： 74
- 提出者数： 39
- 正解者数： 3
- 最初の正解： omeometo (01:38:56)