Practice C: multiple test cases

問題概要

- 偽物が 1 枚混ざった *N* 枚のコイン
  - 偽物は本物より重いか軽いか
- 天秤を *K* 回まで使って必ず偽物を特定できるか？

- $1 \leq N, K \leq 1{,}000{,}000{,}000$
- $1 \leq$ (テストケース数) $\leq 200{,}000$

解法

- 事実： $N = 1$ or $3 \le N \le (3^K - 1) / 2$ のとき可能，そうでないとき不可能

- $N = 1, 2$ に要注意
- 証明は概略だけ紹介します

上からの評価

- K 回天秤を使えると 3^K 通りに分岐
- 全部釣り合った場合以外は偽物が重いか軽いかも特定できてしまっている
- よって $2N - 1 \leq 3^K$
- あとは等号が成り立たないことをがんばって示す

下からの評価

- 途中経過では，コインは次のように分類される：
  - 1 回も測っていない (a 個)
  - 本物だと特定 (b 個)
  - 本物または重い偽物 (c 個)
  - 本物または軽い偽物 (d 個)
    - $a \neq 0$ ならば $c = d = 0$
    - $c + d \neq 0$ ならば $a = 0$

下からの評価

- 次の 3 つを同時に帰納法で証明できる
  - あと k 回天秤が使えるとして,
    - $3 \le a \le (3^k - 1) / 2$ なら可能
    - $1 \le a \le (3^k + 1) / 2$ かつ $b \ge 1$ なら可能
    - $1 \le c + d \le 3^k$ なら可能
  - だいたい 1/3 ずつをうまく選び左右の皿に乗せる, という感じの証明

部分点

- 制約：(テストケース数) = 1
- 今回のジャッジ (ATCODER) の仕様だと以下の解法が可能
  - YES/NO 問題なので，1 回提出すれば各入力に対する答えはわかる
  - あとは入力をがんばって特定
  - $(3^K - 1) / 2$ という答えも予想できる