グラフ探索アルゴリズム
とその応用

2011 / 05 / 04

保坂和宏

内容

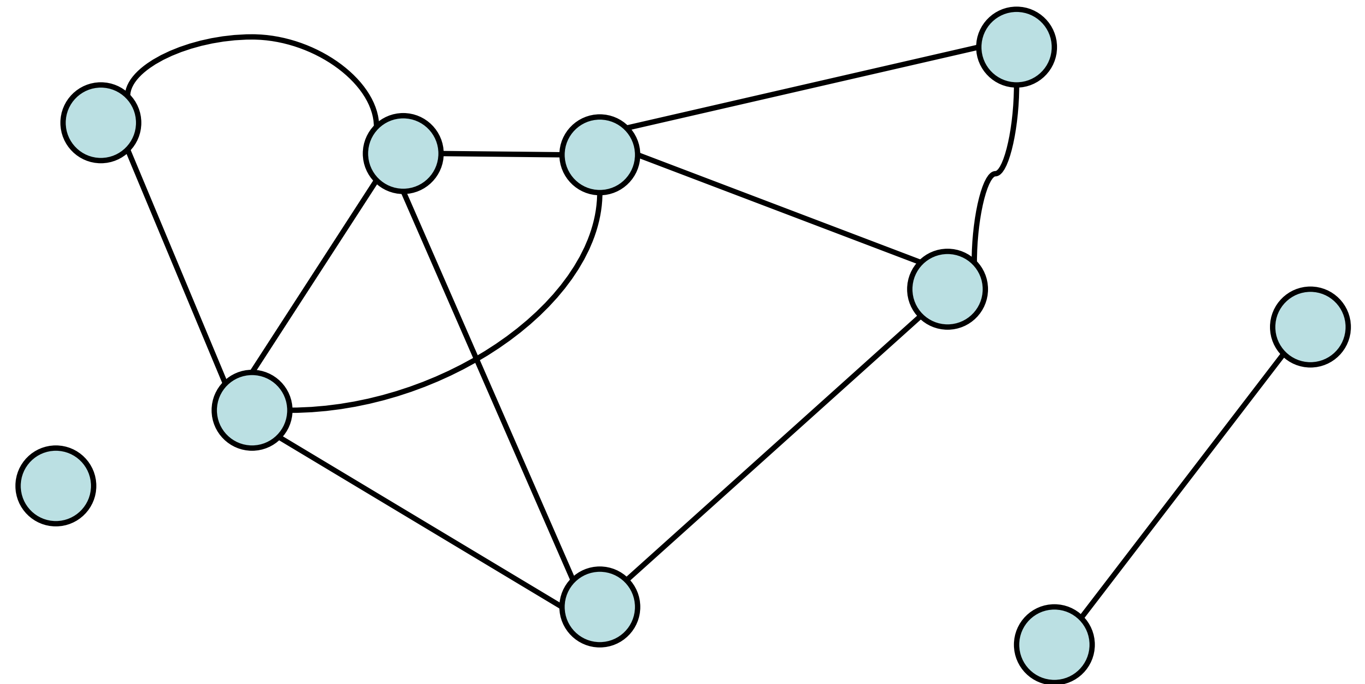
- グラフの扱い方
- 深さ優先探索 (DFS)
  - 橋, 関節点
- 幅優先探索 (BFS)
  - Dijkstra 法, 0-1-BFS
- 辞書順幅優先探索 (LexBFS)
  - cograph

グラフ

- グラフ理論からの出題
  - Islands (IOI 2008)
  - Regions (IOI 2009)
  - Saveit (IOI 2010)
  - Regions (JOI 2010 春合宿)
  - Finals (JOI 2010 春合宿)
  - Joitter (JOI 2011 選考会)
  - Shiritori (JOI 2011 選考会)
  - Report (JOI 2011 選考会)
  - Orienteering (JOI 2011 選考会)

グラフ

- グラフとは？
  - 「点が線で繋がった構造」



グラフ

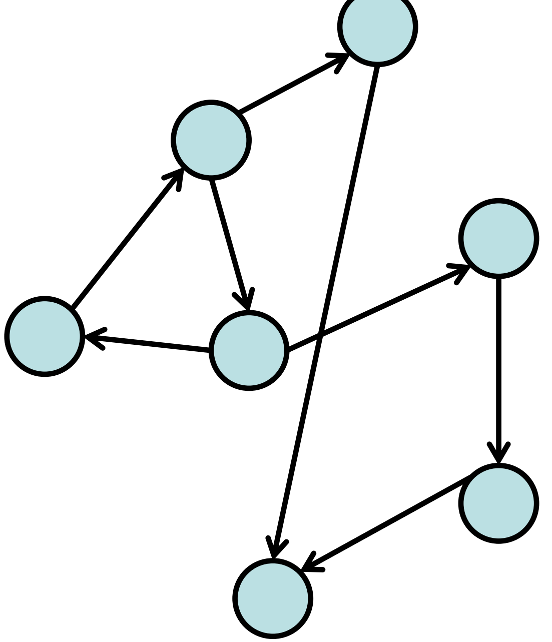
- グラフ (graph) $G = (V, E)$
  V : 頂点 (vertex) の集合
  E : 辺 (edge) の集合
  - $n = |V|$ (頂点数), $m = |E|$ (辺数) とおく

- 辺 : 頂点の 2 つ組
  - 無向グラフ : $\{u, v\}$ と $\{v, u\}$ は区別しない
  - 有向グラフ : (u, v) と (v, u) は異なる辺
  - 重み $c: E \to \mathbb{R}$ が定まっていることも

無向グラフと有向グラフ

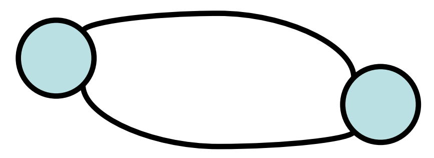
無向グラフ

有向グラフ

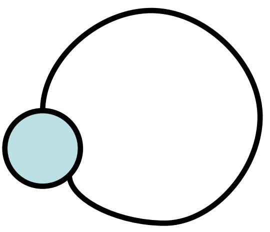


特殊な辺

多重辺



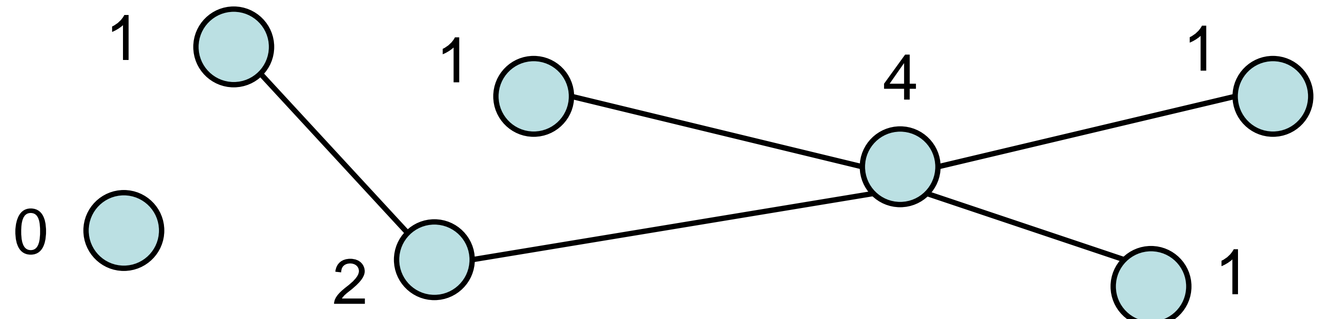
ループ



- 単純グラフ
  - 多重辺やループを含まないグラフ
  - 今回よくでてくるのは無向単純グラフ

グラフの用語

- 次数
  - 頂点 u の次数 (degree) とは, u に接続している辺の個数
  - 有向グラフに対しては,
    - u を始点とする辺の個数 : 出次数 (out-degree)
    - u を終点とする辺の個数 : 入次数 (in-degree)



グラフの用語

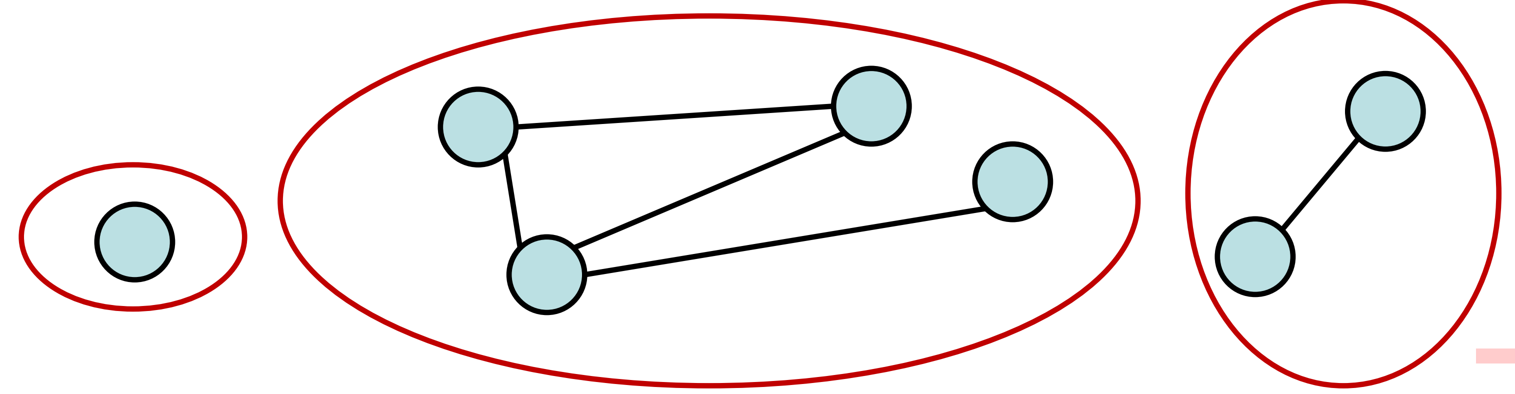
- パス
  - 頂点と辺の列 $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}$ であって, $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ と $e_1, e_2, \ldots, e_k$ がすべて異なるものを<u>パス</u> (path) という
    - 頂点の重複を許す場合もある
- サイクル
  - 頂点と辺の列 $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_1$ であって, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ と $e_1, e_2, \ldots, e_k$ がすべて異なるものを<u>サイクル</u> (cycle) あるいは<u>閉路</u>という

グラフの用語

- 連結性
  - どの 2 頂点 u, v に対しても, u から v へのパスが存在するとき, グラフは連結 (connected) であるという
    - 有向グラフでは強連結 (strongly connected) という

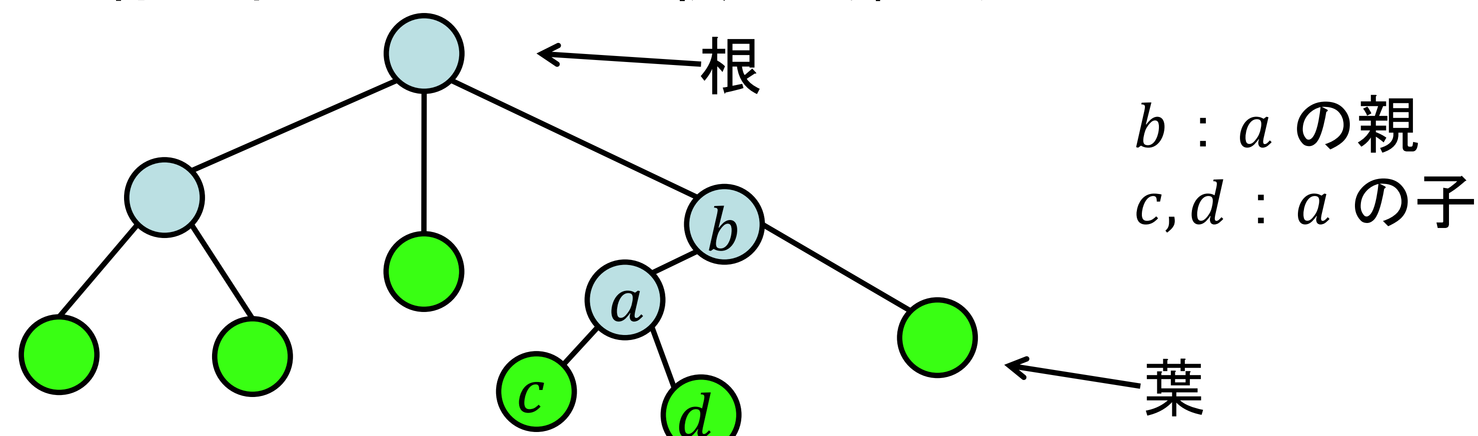
グラフの用語

- 連結成分
  - 「u から v へのパスも v から u へのパスも存在-する」ときに u と v が同じグループに属する, として V をグループ分けしたときの各グループを<u>連結成分</u> (connected component) という
    - 有向グラフでは<u>強連結成分</u> (strongly connected component) という



グラフの用語

- 木
  - 木 (tree)：連結でサイクルがないグラフ
    - n 頂点の木は辺の数 $m = n - 1$
  - 森 (forest)：サイクルがないグラフ
  - ある頂点を根 (root) として考えることがある
    - 有向木：辺の向きが根から葉の方向



グラフの扱い方

グラフの扱い方

- 隣接行列
  - 実装が単純
  - 頂点の 2 つ組で辺を管理したいとき楽
- 隣接リスト
  - 疎グラフに対して高速・省メモリ
    - 疎グラフ … $m = O(n)$ くらい
    - 密グラフ … $m = \Theta(n^2)$ くらい
  - 辺に番号をつけて管理したいとき楽
- グラフを陽に持たない

隣接行列

- 2 次元配列 $g[MAX_N][MAX_N]$ を確保
- 辺 uv に対して $g[u][v]$ を更新
  - 無向グラフなら $g[v][u]$ も同じ値に
- 代入する値 (例)
  - 重みなし：$g[u][v] = \begin{cases} 1 & (uv \in E) \\ 0 & (uv \notin E) \end{cases}$
  - 重みつき：$g[u][v] = \begin{cases} 0 & (u = v) \\ c(uv) & (uv \in E) \\ \infty & (uv \notin E) \end{cases}$

隣接リスト

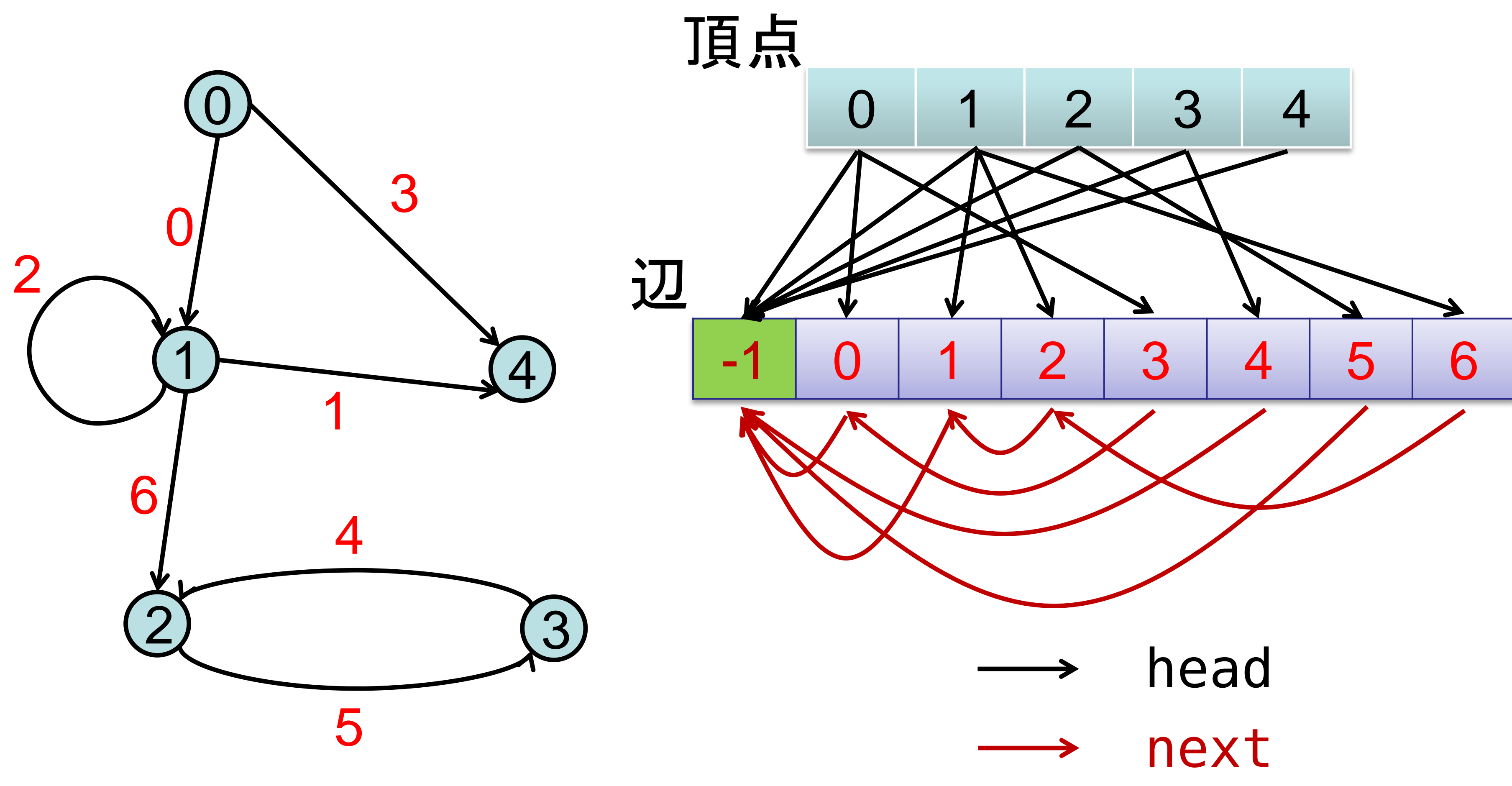
- 各頂点に対し, その点に接続している辺のリストを管理
  - 有向グラフであれば「その点を始点とする辺」
- 実装方法
  - STL の vector を使う (C++)
  - ポインタを使う
  - 配列でリストを実装
    - おすすめ
  - 配列に格納
    - 次数が小さいとわかっているときに良い

隣接リストの実装

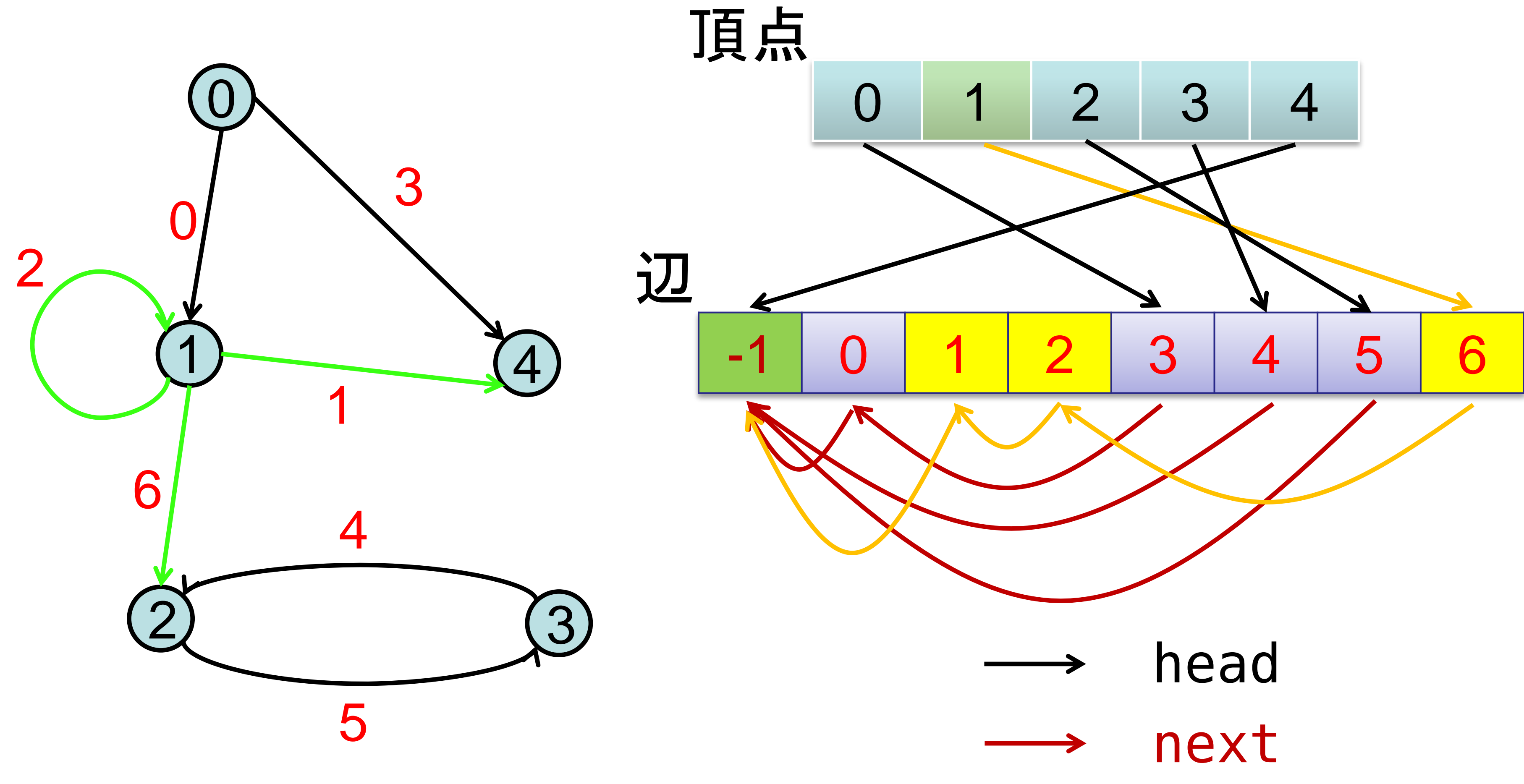
- 配列でリストを実装

```
int m, head[MAX_N], next[MAX_M], to[MAX_M];

    //  初期化
    memset(head, -1, sizeof(head));

    //  辺 uv を加える (無向グラフならば逆向きも加える)
    next[m] = head[u]; head[u] = m; to[m] = v; ++m;

    //  u に接続している辺を調べる (追加と逆順)
    for (e = head[u]; e != -1; e = next[e]) {
        //  辺 e = (u, to[e]) に対する処理
    }
```

隣接リストの実装



隣接リストの実装



隣接リストの実装

- 配列でリストを実装

```
int m, head[MAX_N], next[MAX_M], to[MAX_M];

    //  初期化
    memset(head, -1, sizeof(head));

    //  辺 uv を加える (無向グラフならば逆向きも加える)
    next[m] = head[u]; head[u] = m; to[m] = v; ++m;

    //  u に接続している辺を調べる (追加と逆順)
    for (e = head[u]; e != -1; e = next[e]) {
        //  辺 e = (u, to[e]) に対する処理
    }
```

隣接リストの実装

- $N \times$ (次数の上限) がメモリに収まる場合

```
int deg[MAX_N], g[MAX_N][MAX_DEG];

    //  初期化
    memset(deg, 0, sizeof(deg));

    //  辺 uv を加える (無向グラフならば逆向きも加える)
    g[u][deg[u]++] = v;

    //  u に接続している辺を調べる
    for (i = 0; i < deg[u]; ++i) {
        //  辺 e = (u, g[u][i]) に対する処理
    }
```

隣接リストの実装

- 最初にすべての辺を読み込む方法

```
int deg[MAX_N], p[MAX_N + 1], pp[MAX_N], g[MAX_M];

    //  すべての辺を読み込んだ後, 次数を配列 deg に保存
    for (u = 0; u < N; ++u) {
        p[u + 1] = p[u] + deg[u];
        pp[u] = p[u];
    }

    //  辺 uv を加える (無向グラフならば逆向きも加える)
    g[pp[u]++] = v;

    //  u に接続している辺を調べる
    for (i = p[u]; i < p[u + 1]; ++i) {
        //  辺 e = (u, g[i]) に対する処理
    }
```

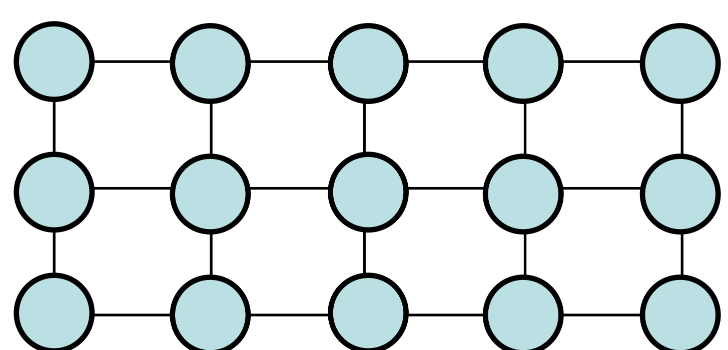
隣接リスト

- 各実装方法の主なデメリット
  - STL の vector を使う (C++)
    - 大きいサイズでは push_back のコストが重い
  - ポインタを使う
    - 自分で構造体を作るのが面倒
  - 配列でリストを実装
    - メモリアクセスの効率が悪い
  - 配列に格納
    - (次数固定) 次数にばらつきがあるとメモリが無駄
    - (1 次元) 最初に読み込んで保存する手間がかかる

グラフを陽に持たない

- 「辺 uv があるかどうか」「辺 uv のコスト」
- 「頂点 u に接続している辺」

- これらを予め調べて配列などに保存するのではなく, 必要になるたびに計算
- 例



辺集合を直接管理

- 辺 uv を「u の小さい順 $\to$ v の小さい順」にすべてまとめてソート (STL の pair (C++))
- すべての辺を平衡二分木, ハッシュテーブルなどに入れる

- 隣接リストの代わりになる
- 2 頂点を指定して辺を調べたいときに便利
- 操作に $O(\log m)$ 程度の時間がかかる

深さ優先探索 (DFS)

グラフ探索アルゴリズム

- 以下のアルゴリズムでグラフの頂点を 1 つずつ取り出す

$R := V$.
while R が空でない:
　　$u \in R$ を「適切に」選ぶ.
　　R から u を取り除く.
　　u に接続している辺を走査して「なにか」する.

– 「適切に」「なにか」は用いるアルゴリズムによる

DFS

- 深さ優先探索 (depth-first search)
  - 「バックトラック法」とも

- 「人間が街で行える探索」
- 再帰, スタック
- 計算量
  - 時間 $O(n+m)$ (隣接行列で持つ場合 $O(n^2)$)
  - 空間 $O(n)$ (再帰の深さ)

DFS

function $DFS\ (u)$

頂点 u を訪れた, と記録.

for each v (u に隣接している点):

if 頂点 v をまだ訪れていない:

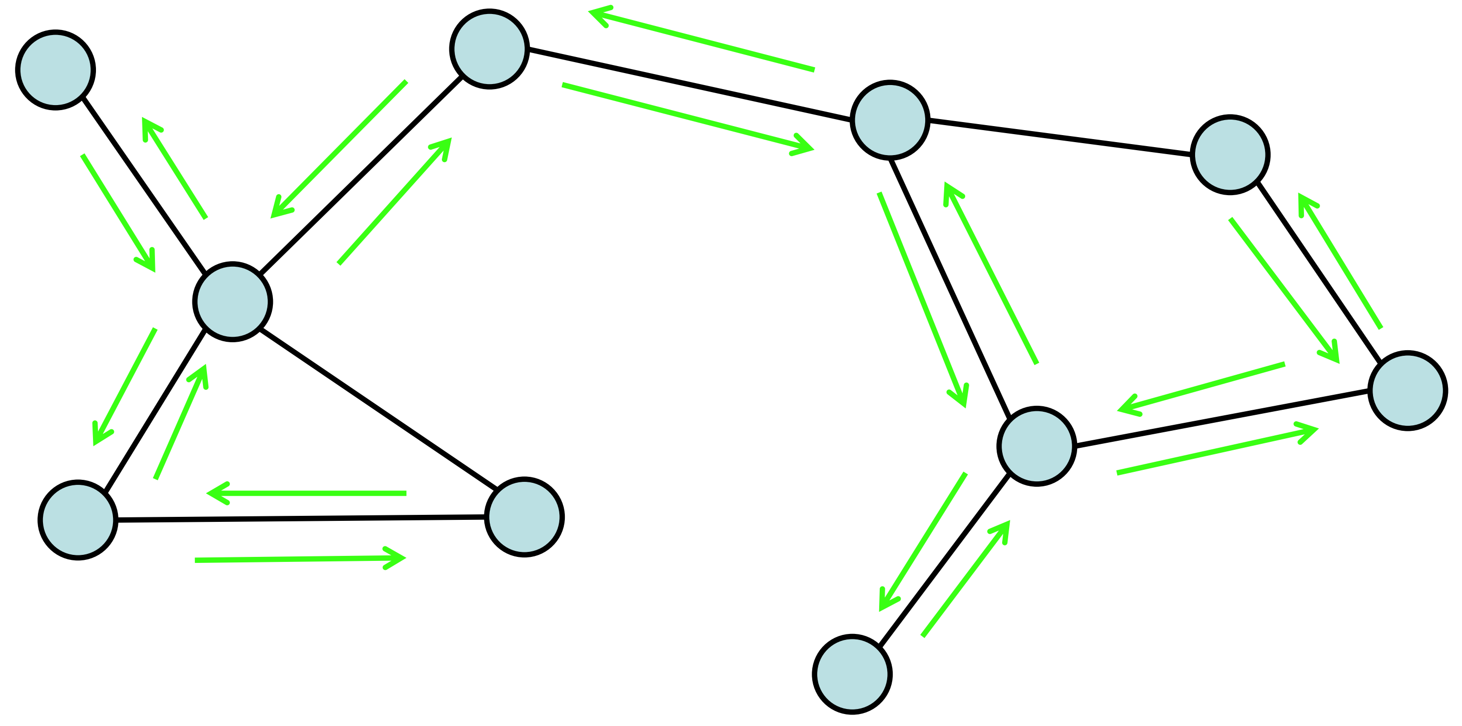
$DFS\ (v)$.

for each $u \in V$:

if 頂点 u をまだ訪れていない:

$DFS\ (u)$.

DFS

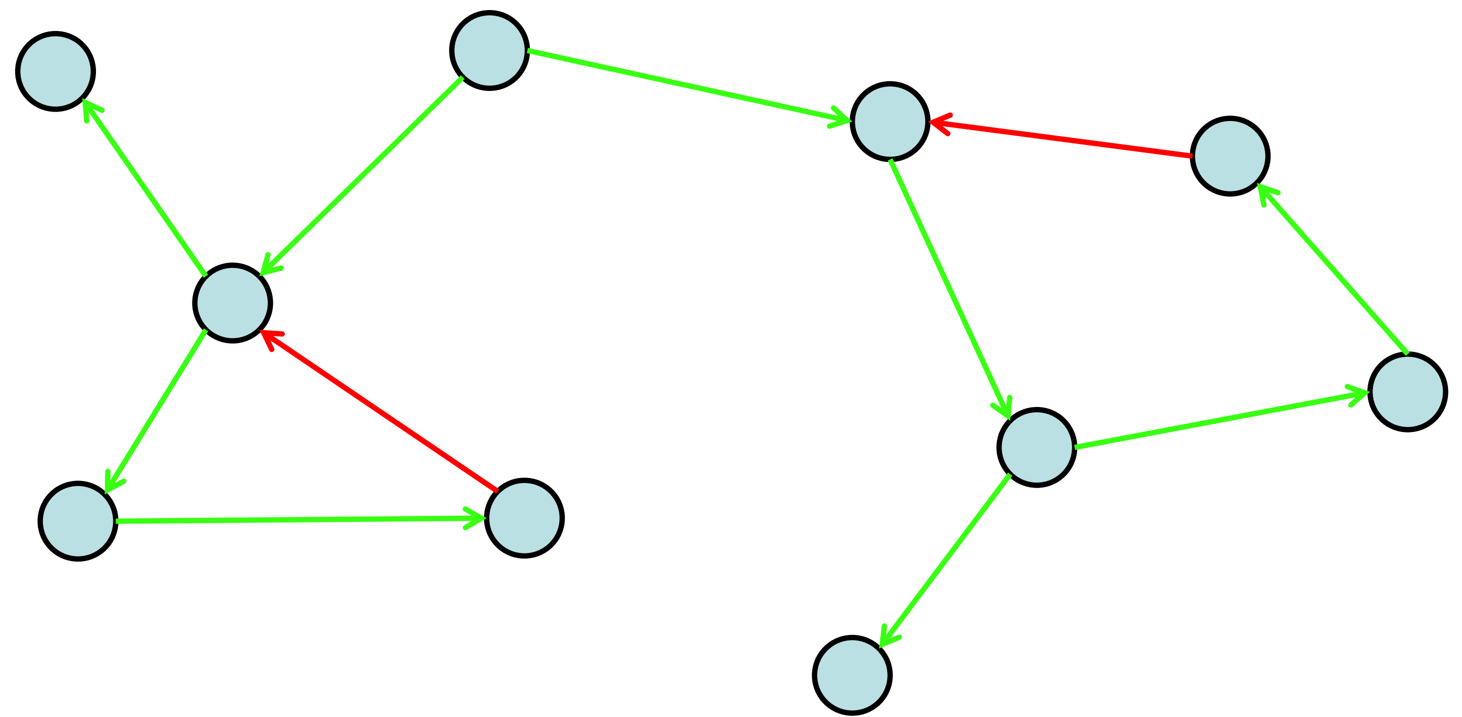


DFS-tree

- DFS を行うと, 通った辺からなる森ができる
  - 連結グラフに対しては木が得られる
  - 深さ優先探索木 (DFS-tree) あるいは深さ優先探索森 (DFS-forest)

- 以下, 無向連結グラフで考える
- DFS で通らなかった辺は？
  - 後退辺 (back edge)

DFS-tree

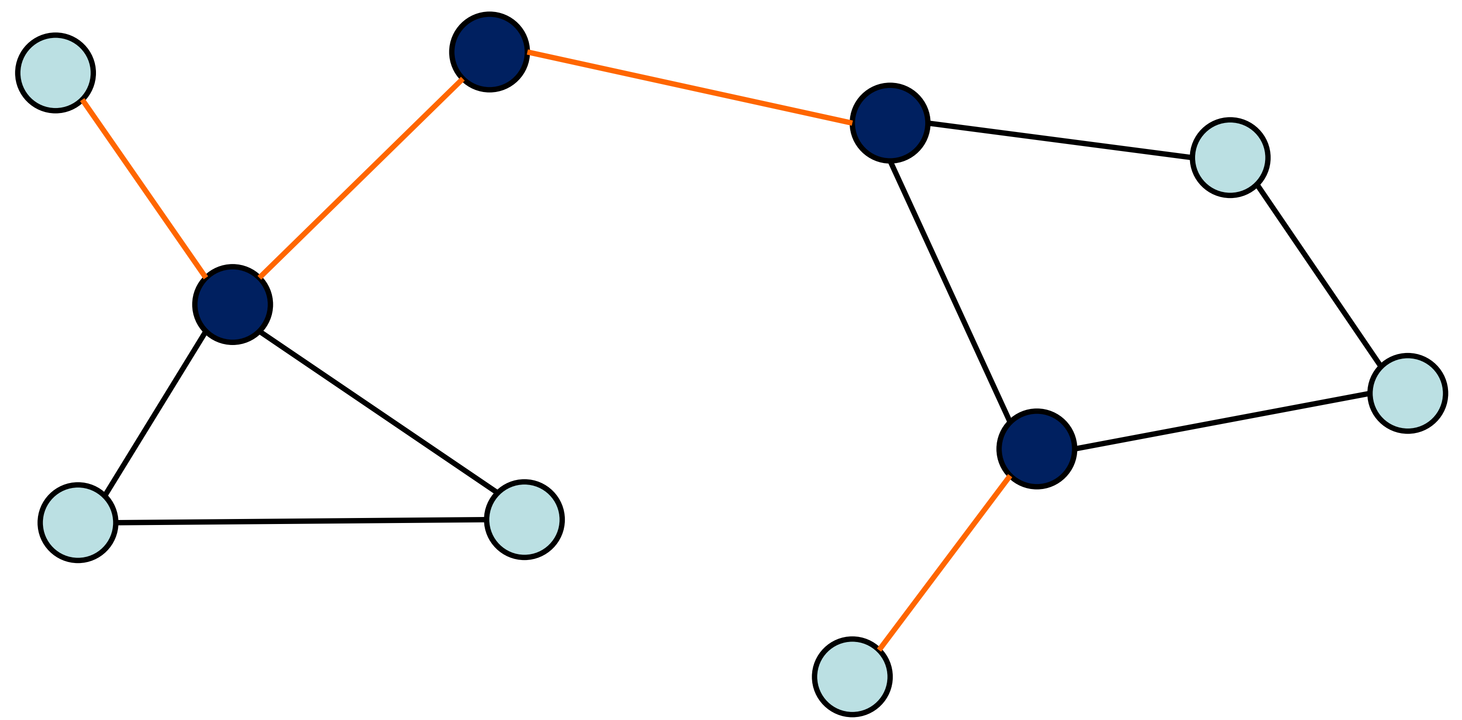


橋, 関節点

- 橋 (bridge)：取り除くと連結成分が増える辺
- 関節点 (articulation point)：取り除くと連結成分が増える頂点
  - 接続している辺も同時に取り除く

- 問題：与えられた無向連結グラフの橋, 関節点をすべて求めよ.

橋, 関節点



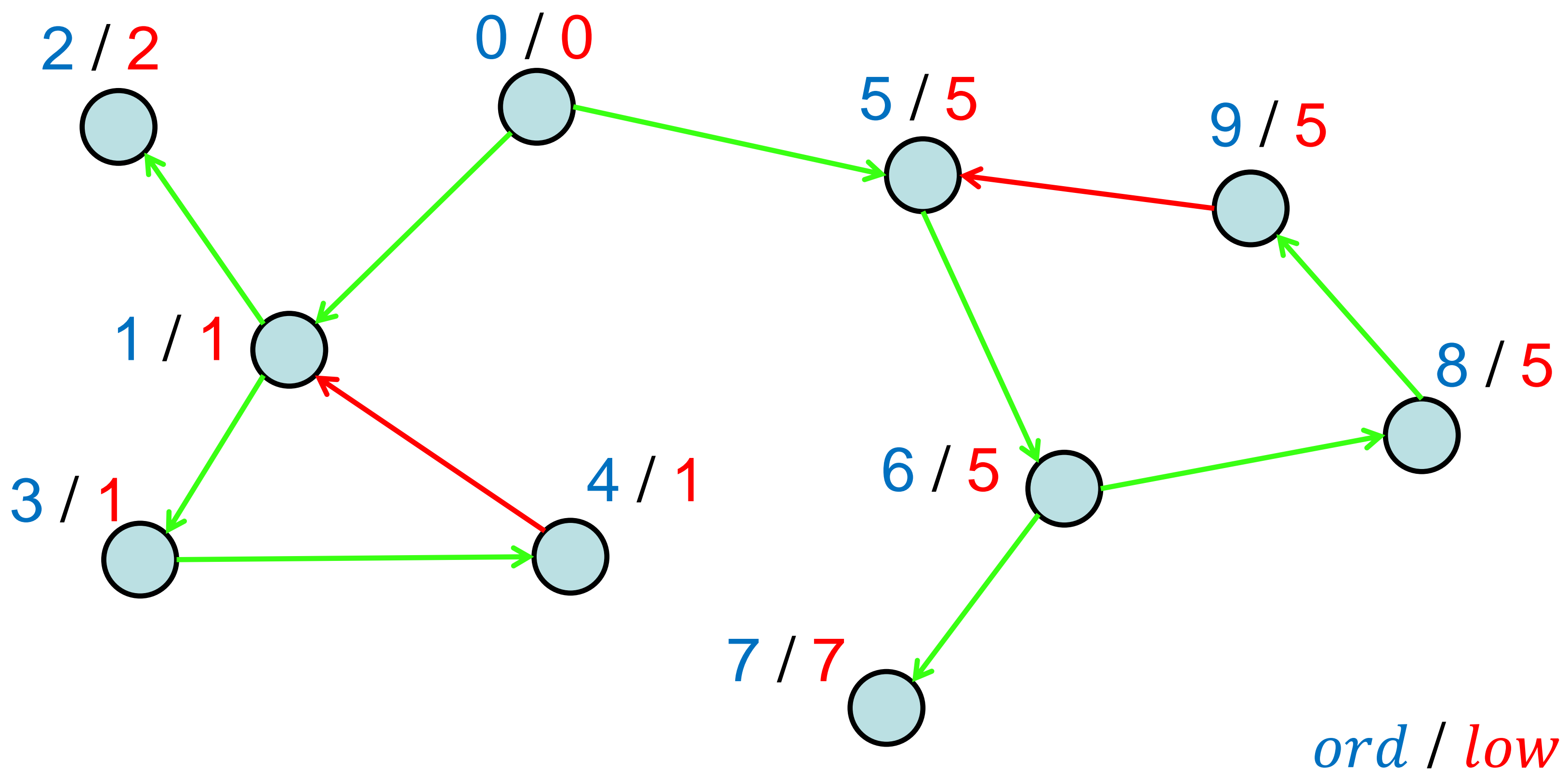
橋, 関節点

- 橋
  - 単純な方法 : 各辺に対し, それを取り除いたときに連結かどうかを DFS などにより調べる
  - $O(m(n+m))$
  - 少し工夫 : DFS を行ったとき, 後退辺は橋になりえないので, DFS 木の辺 ($n-1$ 本) のみを調べる
  - $O(n(n+m))$

Lowlink

- 頂点を訪れた順に番号 $ord[u]$ をつける
  - 根から葉の向きへ進むと ord は大きくなる
- 各頂点の “Lowlink” $low[u]$ を求める
  - $low[u]$ は, u から以下の方法で辿り着ける頂点での ord の最小値
    1. DFS 木の辺を根から葉の向きへ進む (何度でも)
    2. 後退辺を葉から根の向きへ進む (1 回まで)

Lowlink



Lowlink

function $DFS\ (u)$

$ord[u] := k.$

$k := k + 1.$

$low[u] := ord[u].$

for each v (u に隣接している点):

if 頂点 v をまだ訪れていない:

$DFS\ (v).$

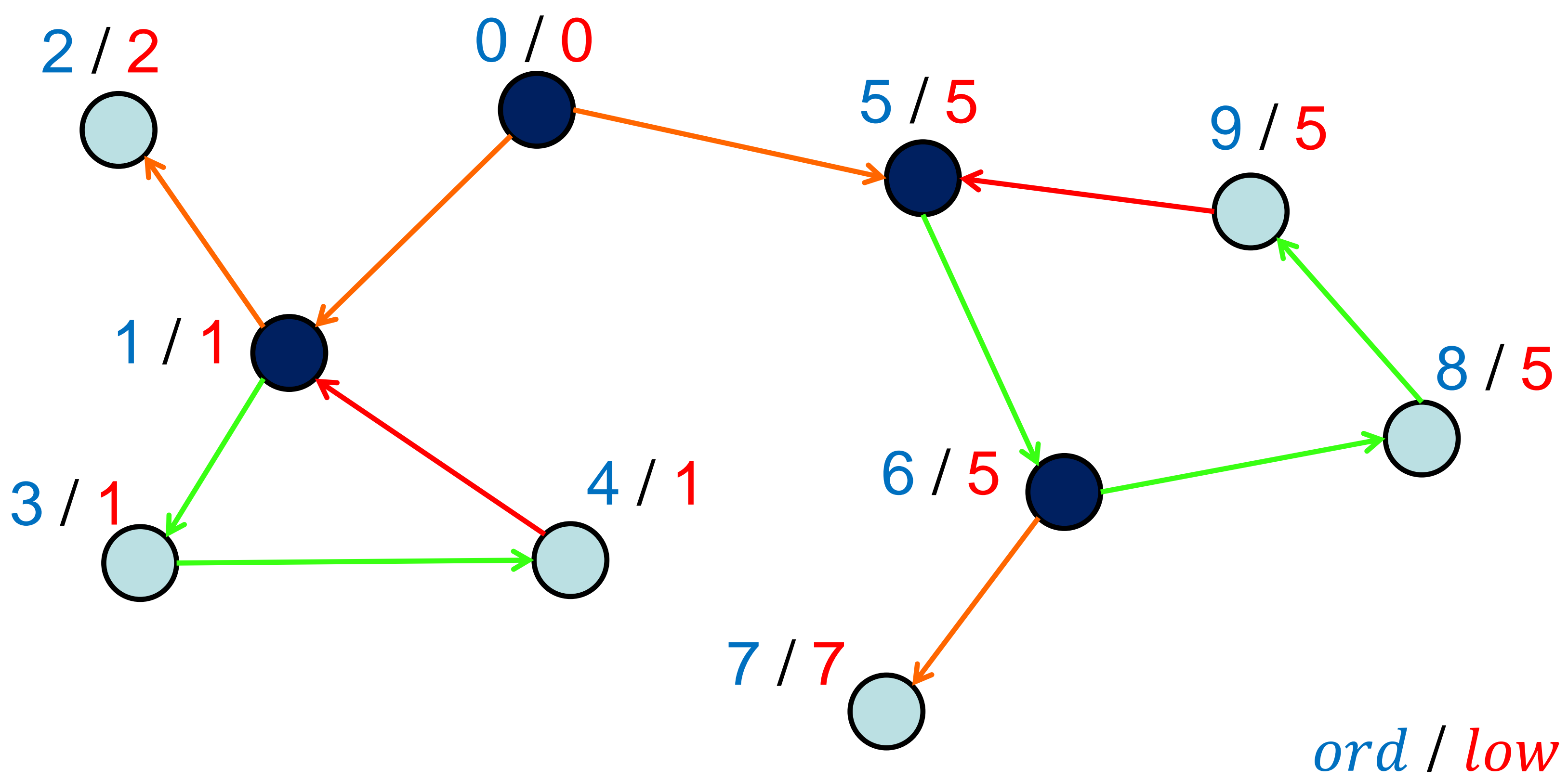
$low[u] := \min\{\, low[u], low[v] \,\}.$

else if 辺 vu を通っていない:

/* このとき uv は後退辺 */

$low[u] := \min\{\, low[u], ord[v] \,\}.$

橋, 関節点



橋, 関節点

- 橋
  - DFS 木の辺 uv が橋 $\Leftrightarrow ord[u] < low[v]$
  - $O(n+m)$

  - 応用例：同じ長さの単語がたくさん与えられるので, 辞書順最小のしりとりを求めよ (JOI 2011 選考会 Shiritori).

橋, 関節点

- 関節点
  - 単純な方法：各頂点に対し, それを取り除いたときに連結かどうかを DFS などにより調べる
  - $O(n(n+m))$

  - DFS 木の根が関節点 $\Leftrightarrow$ (次数) > 1
  - DFS 木の根以外の頂点 u が関節点
    $\Leftrightarrow$ u のある子 v に対し $ord[u] \leq low[v]$
  - $O(n+m)$

橋, 関節点

- 発展：無向連結グラフが与えられる. 以下のようなクエリに答えよ (Croatia OI 2007).
  - 頂点 u, v と辺 e に対し, e を取り除いたとき u から v へ辿り着けるか？
  - 頂点 u, v, w に対し, w を取り除いたとき u から v へ辿り着けるか？

幅優先探索 (BFS)

BFS

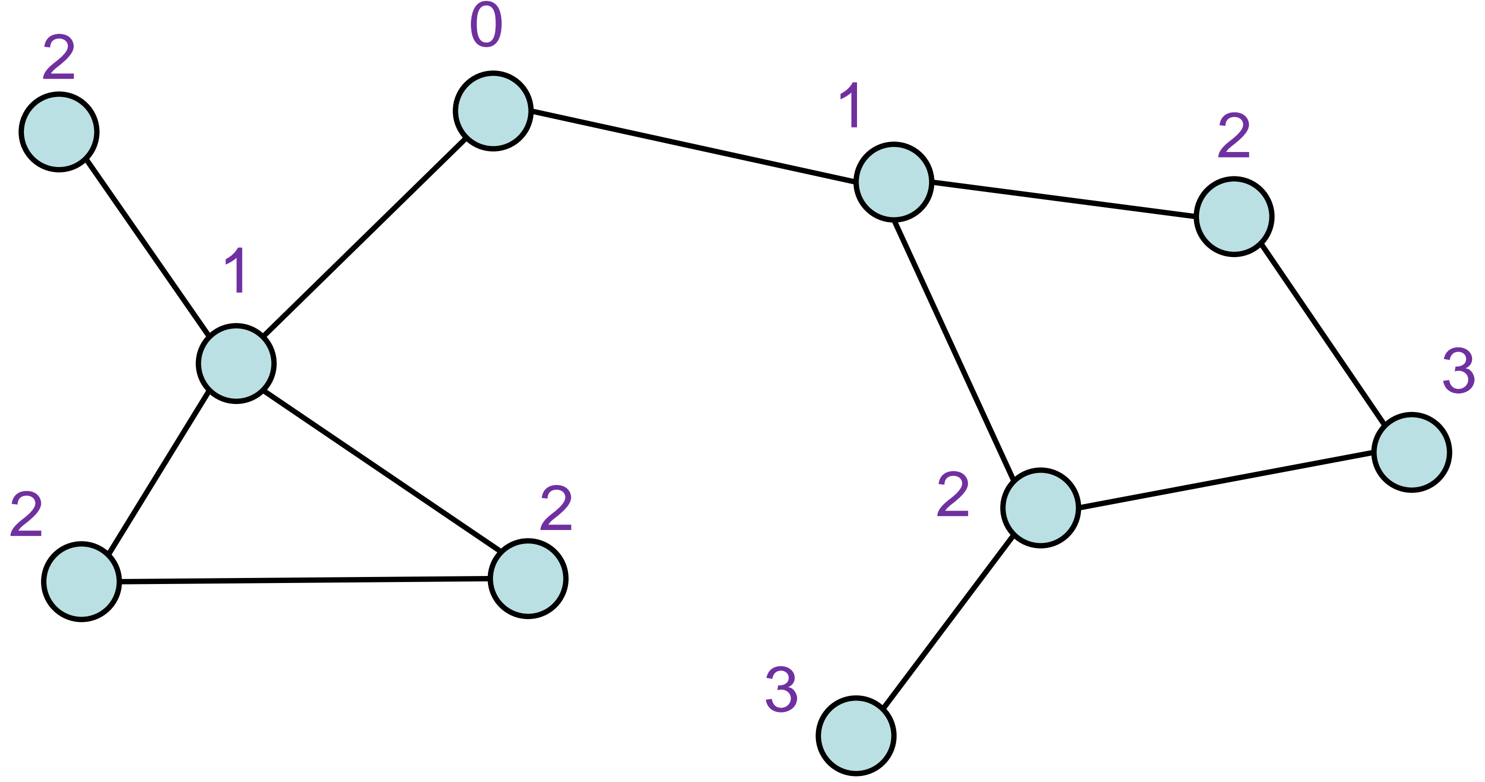
- 幅優先探索 (breadth-first search)

- 距離が近いところから順番に見る
  - 最短路が求まる
- キュー (待ち行列)
- 計算量
  - 時間 $O(n+m)$ (隣接行列で持つ場合 $O(n^2)$)
  - 空間 $O(n)$

BFS

```
for each u ∈ V:
        dist[u] := ∞.
dist[start] := 0.
Q の末尾に start を追加.
while Q が空でない:
        u := Q の先頭から取り除く.
        for each v (u に隣接している点):
                if dist[v] > dist[u] + 1:
                        dist[v] := dist[u] + 1.
                        Q の末尾に v を追加.
```

BFS



BFS-tree

- BFS を行うと, 通った辺からなる木ができる
  - 幅優先探索木 (BFS-tree)
  - $start$ から各頂点への最短路は BFS-tree 上の根からのパス

- BFS で通らなかった辺は？
  - $dist$ の差が 0 または 1

Dijkstra 法, 0-1-BFS

- BFS では, 次の頂点を選ぶ機構としてキューを用いた
  - 最初に追加したものが最初に取り出される
- これを変えると重みつきグラフの最短路を求めることができる

Dijkstra 法

- Dijkstra 法
  - 辺の重みは非負に限る
  - $dist[v] \coloneqq dist[u] + c(uv)$ のように距離を更新
  - 次の頂点を選ぶときに, まだ選ばれていない頂点のうち $dist[u]$ が最小であるものを選ぶ

  - 単純な方法：$O(n^2)$ (密グラフに対しては高速)
  - ヒープなどのデータ構造を用いる：$O((n+m)\log n)$
    - 実用的ではないが $O(n \log n + m)$ となるものもある

0-1-BFS

- 0-1-BFS
  - 辺の重みは 0 または 1 に限る
  - 次の頂点を選ぶときに, まだ選ばれていない頂点のうち $dist[u]$ が最小であるものを選ぶ
  - デック (両端キュー) を用いる：$O(n+m)$
    - 先頭および末尾に対する追加・削除ができる

0-1-BFS

Q の末尾に $start$ を追加.
while Q が空でない:
　　$u := Q$ の先頭から取り除く.
　　for each v (u に隣接している点):
　　　　if $dist[v] > dist[u] + c(uv)$:
　　　　　　$dist[v] := dist[u] + c(uv)$.
　　　　　　if $c(uv) = 0$:
　　　　　　　　Q の先頭に v を追加.
　　　　　　else (**if** $c(uv) = 1$):
　　　　　　　　Q の末尾に v を追加.

辞書順幅優先探索 (LexBFS)

LexBFS, Cograph

- LexBFS
- Cograph
- P_4-free graph
- Read-once function

- グラフはすべて無向単純グラフ

P_4-free graph

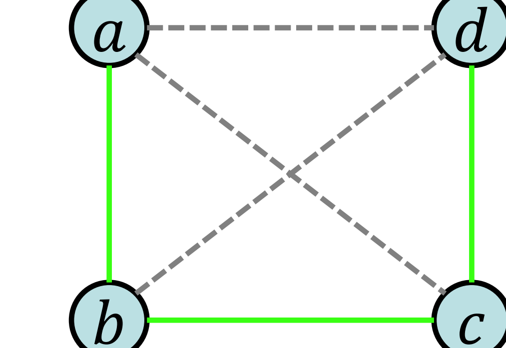
- 問題 1：グラフ $G = (V, E)$ が与えられるので, 以下の条件をみたす 4 頂点 a, b, c, d が存在するか否か判定せよ.

  (PKU Judge Online 3236)

  – $ab, bc, cd \in E$

  – $ac, ad, bd \notin E$

P_4



Read-once function

- 問題２：単項式の和の形の式が与えられるので, 現れた文字を１回ずつと加算・乗算のみを使って等価な式に変形できるか否か判定せよ.
  - 可能：$acf + bc + ceh + dg$
    - $(af + b + eh)c + dg$
  - 可能：$abc + aef + ag + bcd + def + dg$
    - $(a + d)(bc + ef + g)$
  - 不可能：$abc + abe + ade + bcf + bef + def$

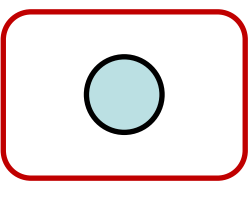
Cograph

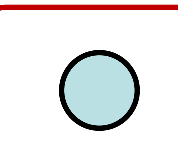
- cograph (complement reducible graph)

1. 1 頂点からなるグラフは cograph
2. G_1, G_2 が cograph ⇒ $G_1 \cup G_2$ も cograph
3. G が cograph ⇒ $\bar{G}$ も cograph
4. 以上で定まるものが cograph 全体

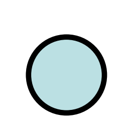
  - $G_1 \cup G_2$: G_1, G_2 の union (結ばずに並べる)
  - $\bar{G}$: G の complement (辺の有無を逆転)
    - complement … 補グラフ

Cograph

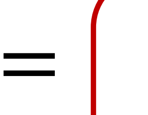


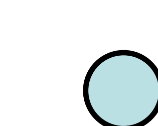


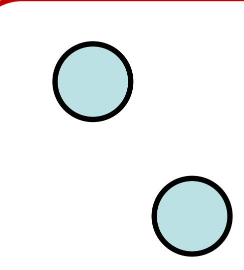
∪



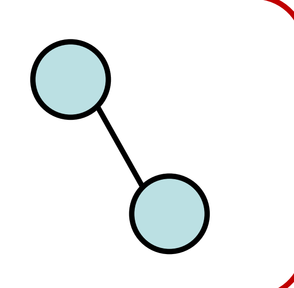
=



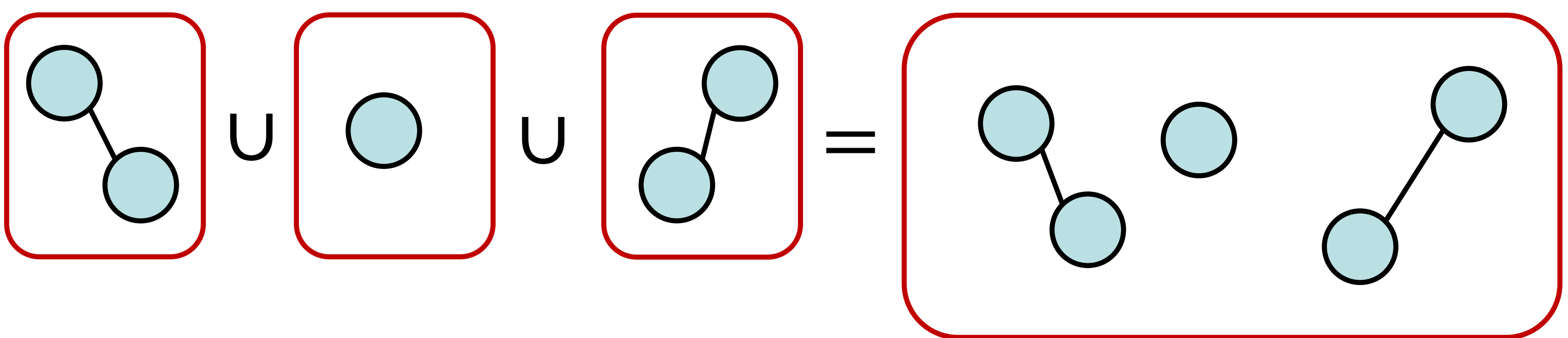


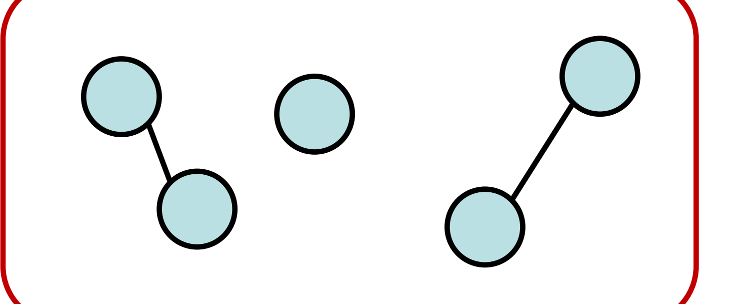


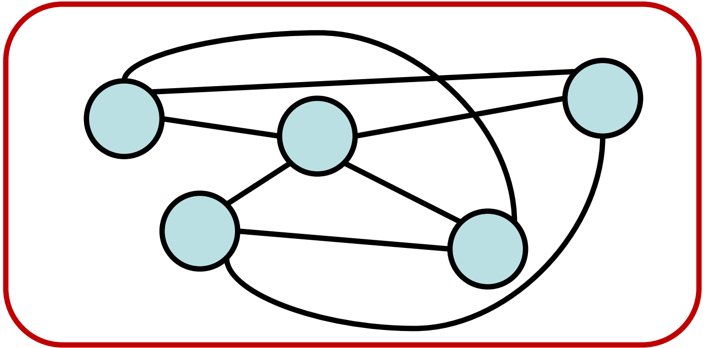
=



Cograph







無向グラフの性質

- $G=(V,E)$ に対し，G または $\bar{G}$ の少なくとも一方は連結
  - (証明) G が連結でないとする. $u,v \in V$ に対し,
    - $uv \in E$ のとき：u,v を含まない G の連結成分が存在. そこから頂点 w を選べば, $uw, wv \notin E$ より $\bar{G}$ のパス uwv が存在
    - $uv \notin E$ のとき：$\bar{G}$ のパス uv が存在

- 2 頂点以上の cograph G に対し, G または $\bar{G}$ のちょうど一方が連結

Cograph 判定

- 問題：グラフが与えられたとき, cograph であるか否かを判定せよ.

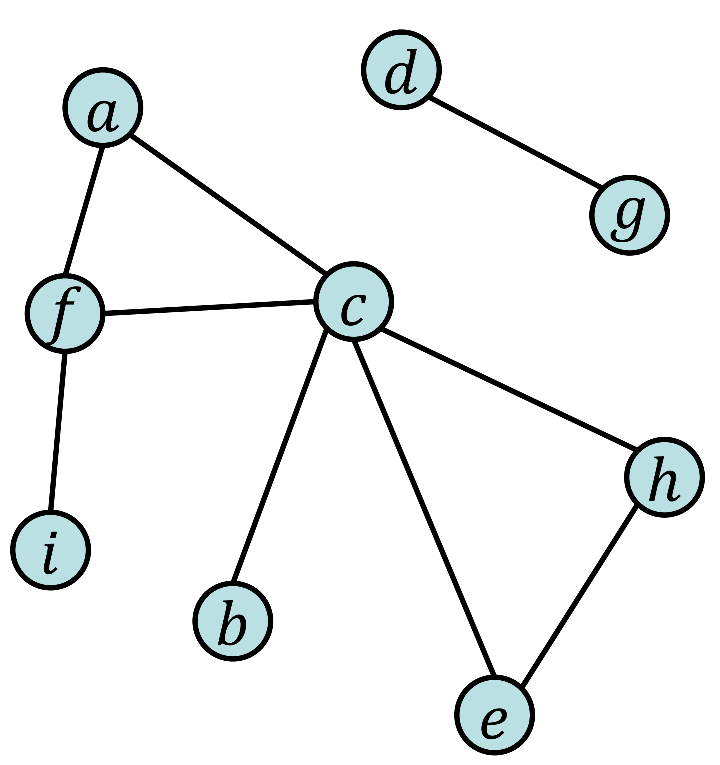
- 単純な方法：$O(nm)$
  - 1 頂点ならば cograph
  - G も $\bar{G}$ も連結ならば G は cograph でない
  - G または $\bar{G}$ のうち連結でない方を連結成分に分解し, それぞれが cograph であるかどうかを再帰的に調べる

LexBFS

- 辞書順幅優先探索
  (LexBFS, lexicographic breadth-first search)

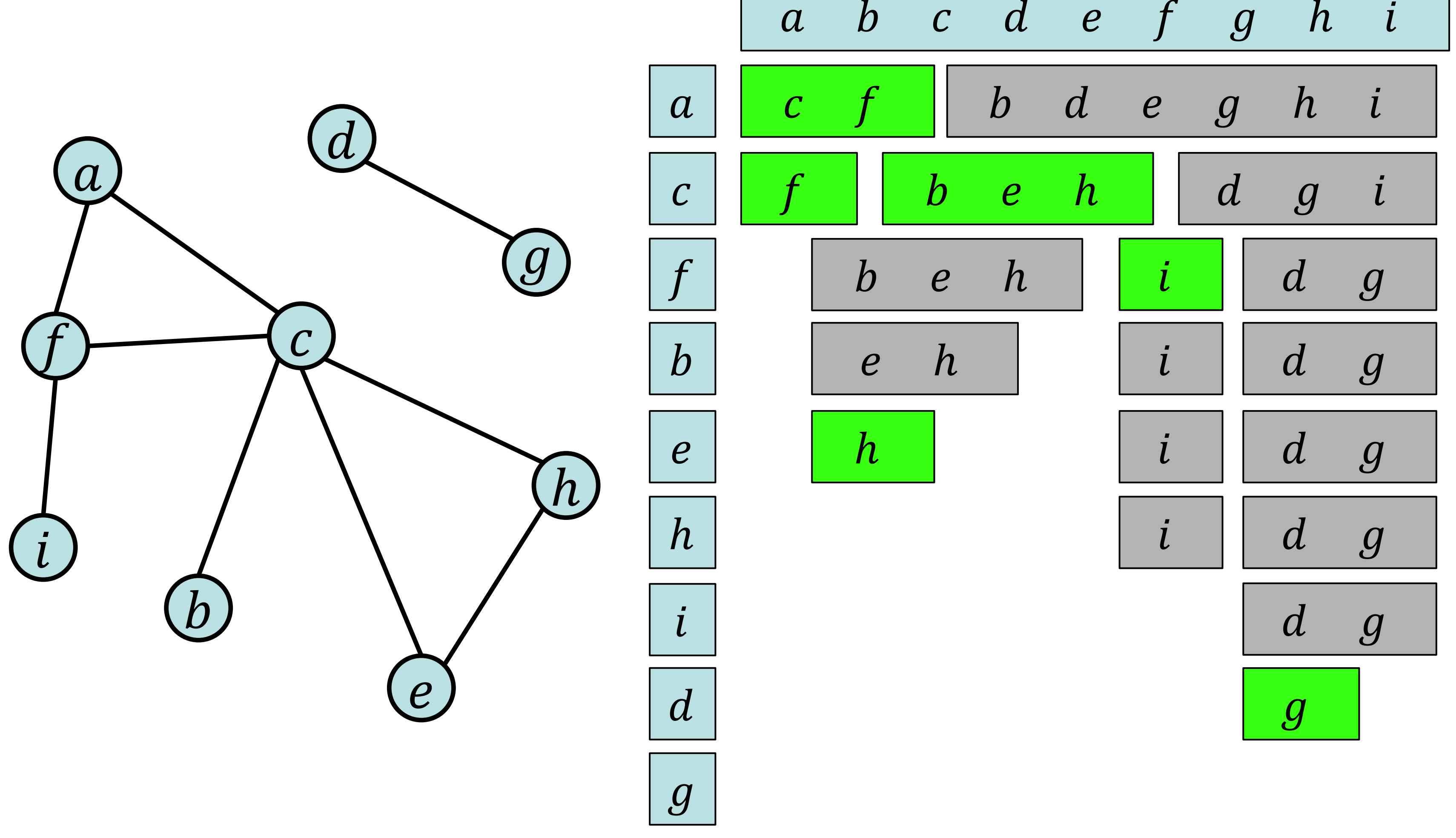
- BFS の一種
  - 最初の方に選んだ頂点に隣接する頂点を優先
- 計算量
  - 時間 $O(n+m)$ (隣接行列で持つ場合 $O(n^2)$)
    - いろいろ手抜くと $O(n^2 \log n)$
  - 空間 $O(n)$

LexBFS



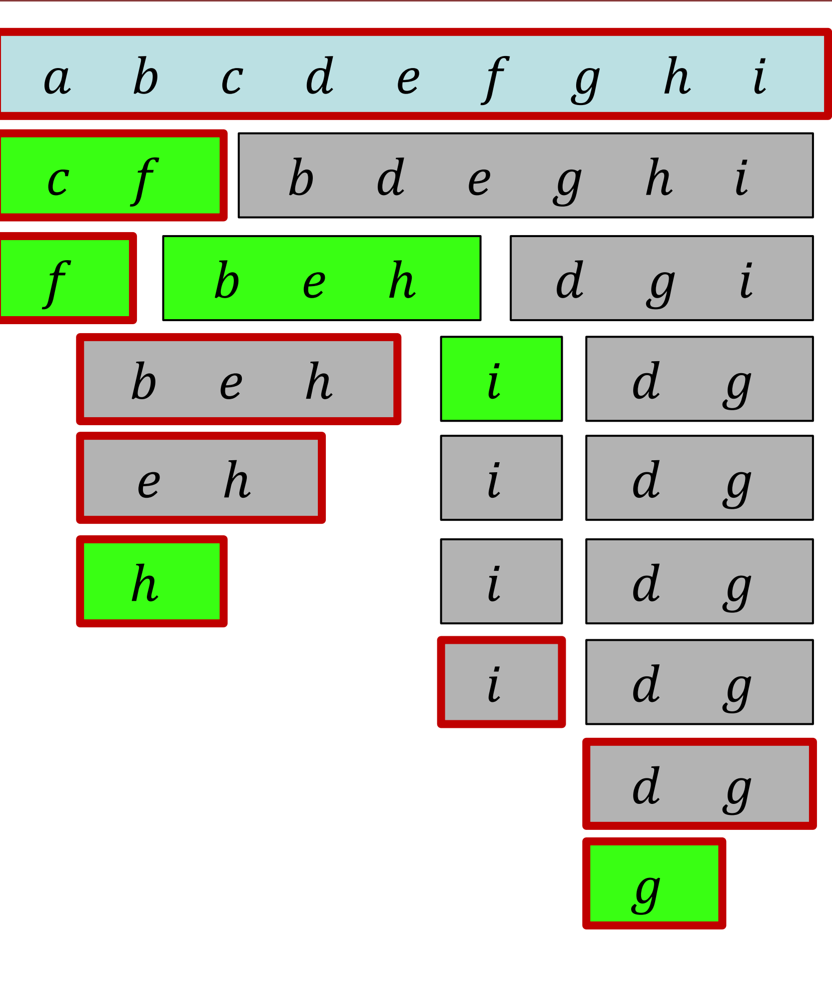
- グラフ探索における「まだ訪れていない頂点」を「リストのリスト」で管理する
- 最初に頂点に適当な順序を与える

LexBFS



LexBFS

- slice
  - 頂点を取り出すときの先頭のリストに属していた頂点集合
    - 既に選ばれた頂点との接続関係は同じ
    - 最初に与えられた順番により先頭が選ばれる
  - 先頭の頂点 u の slice を $S(u)$ と書く



LexBFS

- slice の構造

$$\left[\, a \left[\, c \left[\, f \,\right]\right]\left[\, b \left[\, e \left[\, h \,\right]\right]\right]\left[\, i \,\right]\left[\, d \left[\, g \,\right]\right]\right]$$

- $S(u)$ を分解

$$S^A(a) = cf$$
$$S_1(a) = beh,\ S_2(a) = i,\ S_3(a) = dg$$

  - u
  - $S^A(u)$: $S(u)$ 中の u に隣接している頂点
  - $S_1(u), S_2(u), \ldots$: LexBFS で $S^A(u)$ の点まで取り出したときのリストの中身
    - $S_i(u)$ は一般には slice とは限らない

Cograph 判定

- G が cograph であるかを $O(n+m)$ で判定

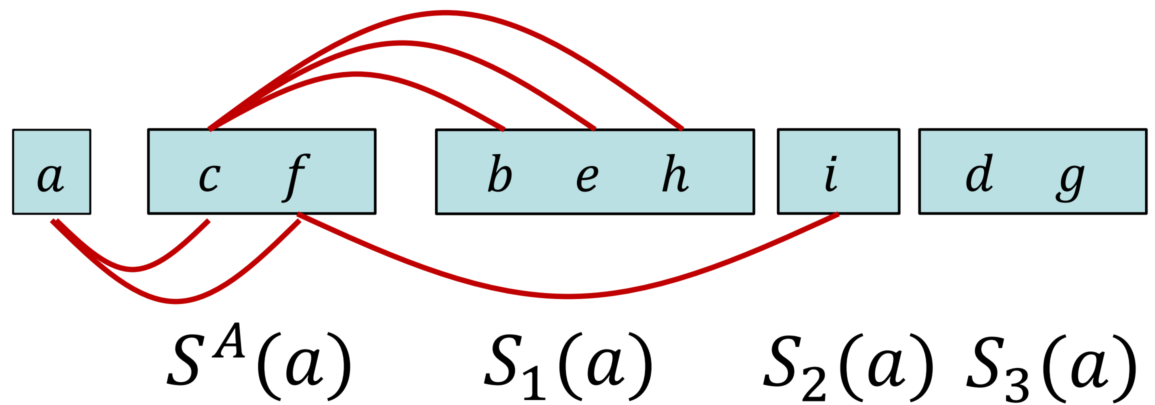
1. G に LexBFS を行う
2. 1. で頂点を取り出した順序を最初の順序として, $\bar{G}$ に LexBFS を行う
   - G に対する LexBFS と同様に行うが, リストを隣接点とそれ以外に分けるとき, 隣接点を後ろに置く
3. 1. と 2. で得られる slice が「適切な性質」を持つかどうか調べる

Cograph 判定

- cograph の slice が持つ性質 (証明略)
  - $i < j$ に対し, $S_i(u)$ の頂点と $S_j(u)$ の頂点を結ぶ辺は存在しない
  - $v \in S^A(u)$ と $i < j$ に対し, v が $S_j(u)$ の頂点と隣接しているならば, v は $S_i(u)$ の頂点とも隣接している
    - 各 $S_i(u)$ 内では, $S^A(u)$ のどの頂点と隣接しているかは同じであることに注意
- 計算量 $O(n+m)$

Cograph 判定

$$\left[\, a \,[\, c \,[\, f \,]\,]\,[\, b \,[\, e \,[\, h \,]\,]\,]\,[\, i \,]\,[\, d \,[\, g \,]\,]\,\right]$$

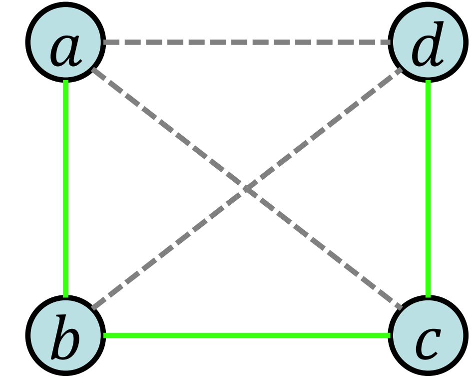


– $S^A(a)$ の点は, $S_1(a)$ に対しては c, $S_2(a)$ に対しては f で隣接

→ cograph でない

Cograph と P_4

- 元のグラフも complement も連結なグラフ
  - 1 頂点からなるグラフ
  - P_4 (complement も P_4)



- 実は, cograph であることは, P_4 を含まないことと同値
  - 「P_4 を含む」とは, 単に 4 頂点からなるパスが存在するだけでなく, 上図の ac, ad, bd に対応する箇所に辺がないことも要する

Cograph と P_4

- cograph は P_4 を含まない
  - (証明)
    1. 1 頂点からなるグラフは P_4 を含まない
    2. G_1, G_2 が P_4 を含まない ⇒ $G_1 \cup G_2$ も P_4 を含まない
    3. G が P_4 を含まない ⇒ $\bar{G}$ も P_4 を含まない
  - 以上より帰納的に示される

Cograph と P_4

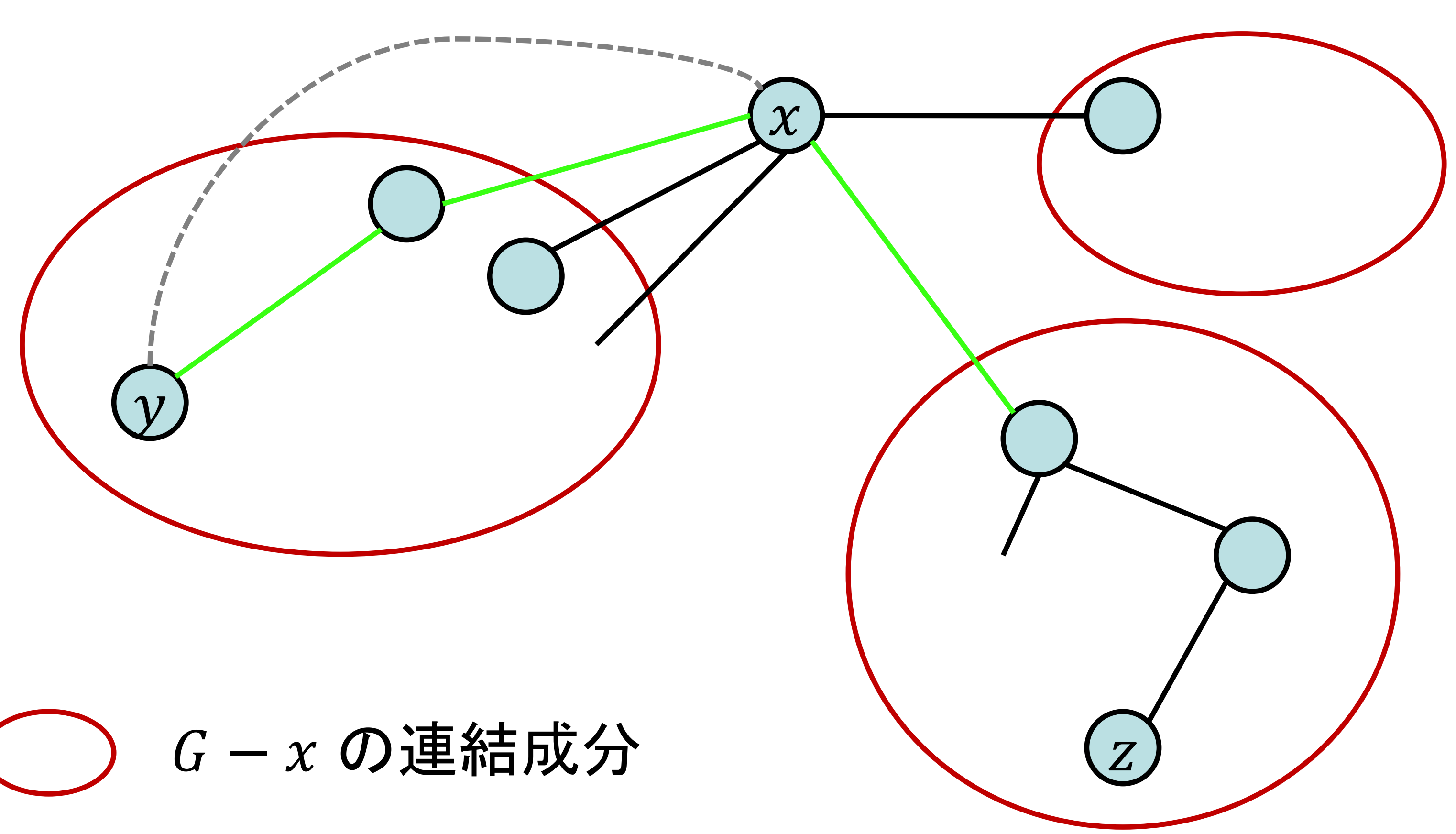
- P_4 を含まないグラフは cograph である
  - (証明)
    - P_4 を含まないかつ cograph でないグラフが存在すると仮定
    - G ：そのうち頂点数が最小のものの 1 つ
    - x ：G の適当な頂点
    - $G-x$ (G から x を取り除いたグラフ) は P_4 を含まないので cograph
    - $G-x$ が連結のときは $\overline{G-x}$ が連結でないので, G の代わりに $\bar{G}$ を考えることで, $G-x$ は連結でないとしてよい

Cograph と P_4

- P_4 を含まないグラフは cograph である
  - (証明つづき)
    - G も $\bar{G}$ も連結
      - 連結でないとすると cograph たちに分かれるので矛盾
    - y : G の頂点で x と隣接しないものがとれる
    - z : $G - x$ で y と異なる連結成分に属する頂点
    - G は連結なので y から z へのパスが存在するが,
      - x を経由しなければならない
      - y から x へは他の頂点を経由しなければならない

  $\rightarrow$ y から z への辺が最小のパスを考えると,「ショートカット」がないのでこのパスは P_4 を含み矛盾

Cograph と P_4

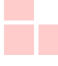


Cograph と Cotree

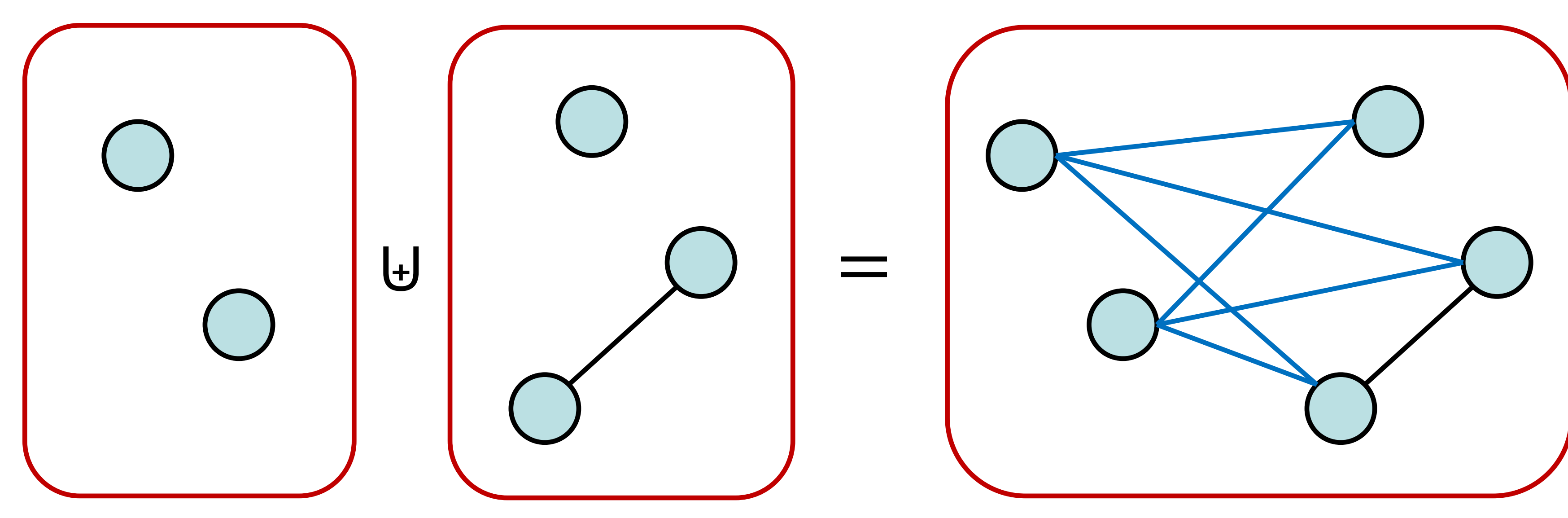
- cograph の定義は, 次の定義と同値

1. 1 頂点からなるグラフは cograph
2. G_1, G_2 が cograph ⇒ $G_1 \cup G_2$ も cograph
3. G_1, G_2 が cograph ⇒ $G_1 \uplus G_2$ も cograph
4. 以上で定まるものが cograph 全体

  - $G_1 \uplus G_2$: G_1, G_2 の join (G_1 の頂点と G_2 の頂点を結ぶ辺をすべて加えて並べる)
    - join は complement, union, complement でできる



Cograph と Cotree

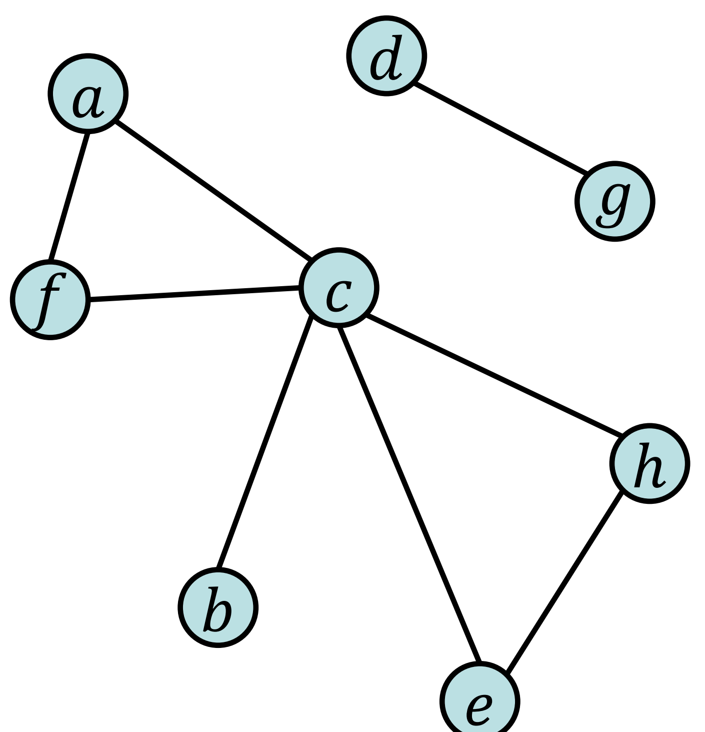


Cograph と Cotree

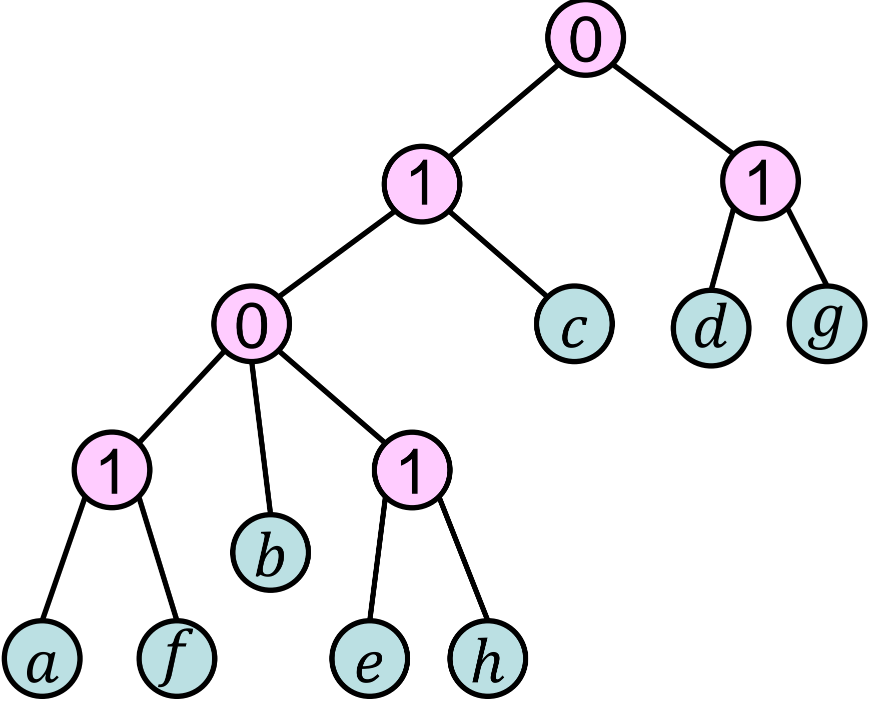
- cotree
  - cograph の頂点を葉とし, その他の頂点には 0 か 1 の印がついている
  - cograph の構成に対応
    - 0 : union
    - 1 : join
  - complement をとると 0 / 1 がすべて入れ替わる
  - cograph の 2 頂点に対して, 最も根から遠い共通の祖先が 0 ならば辺がなく, 1 ならば辺がある

Cograph と Cotree

cograph



対応する cotree



Cograph と Cotree

- LexBFS で cograph 判定をするとき, 以下も計算量 $O(n+m)$ で行える (詳細略)
  - cograph である場合, cotree (後述) を構成
  - cograph でない場合, 含まれる P_4 を検出

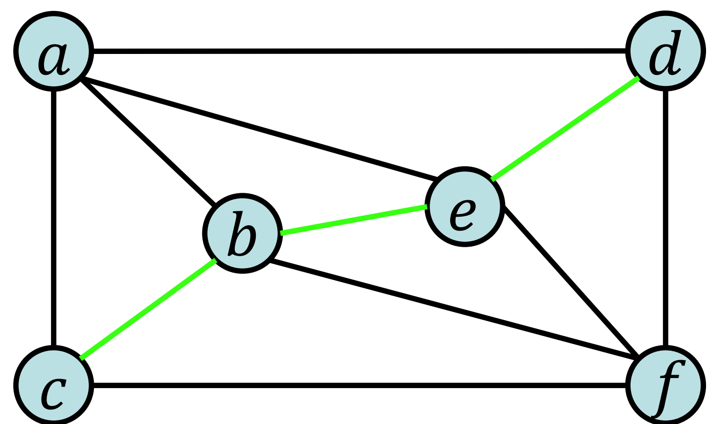
Cotree と Read-once function

- read-once かどうかの判定
  - $acf + bc + ceh + dg$
  - $abc + abe + ade + bcf + bef + def$

1. 各変数を頂点とするグラフを考える
2. 掛け合わさっている変数どうしを辺で結ぶ
   - $ac, af, cf,\ bc,\ ce, ch, eh,\ dg$
   - $ab, ac, bc,\ \ldots$
   - 重複は無視する

Cotree と Read-once function

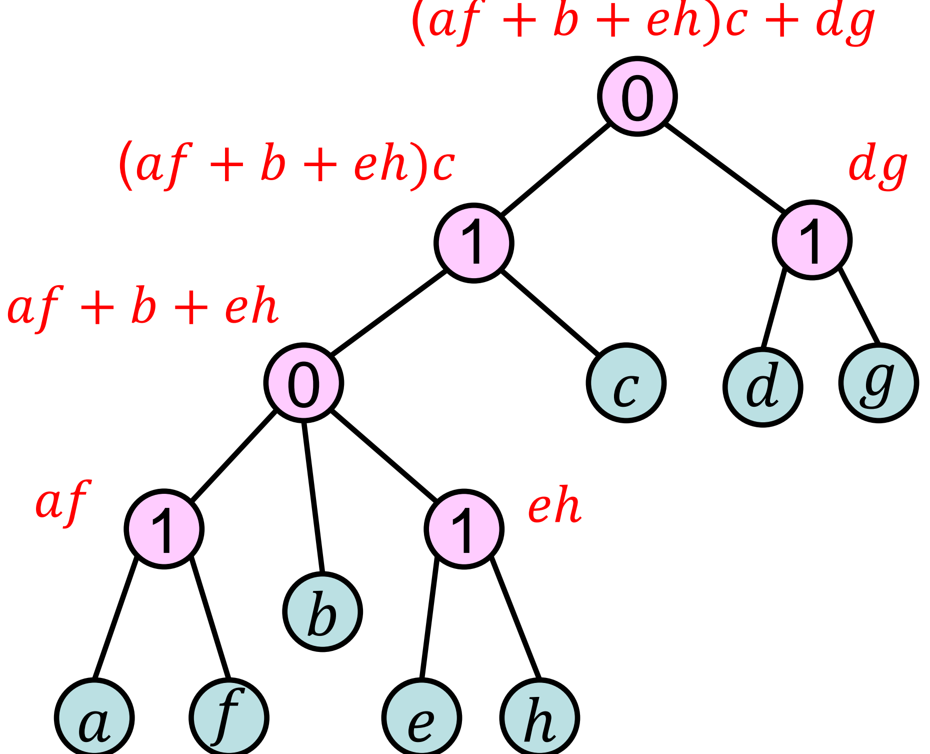
- read-once かどうかの判定 (つづき)
  3. cograph でないならば失敗



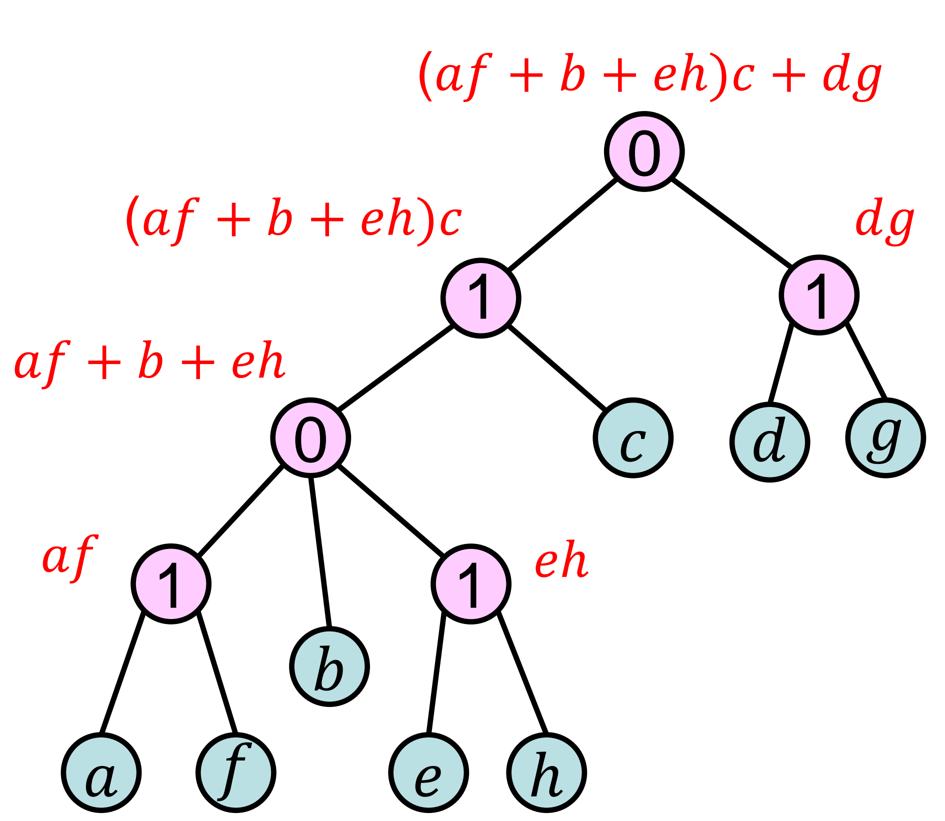
  4. cograph ならば, cotree から多項式を復元して元の多項式になれば read-once

Cotree と Read-once function

- cotree の 0 を +, 1 を × と考えて多項式を復元



Cograph と Read-once function



- 各項は cograph の極大クリークに対応している
  - クリーク：頂点の集合で, どの 2 点も辺で結ばれているもの

Cograph の性質

- cotree を構成すると,
  - 最大クリークが求められる
  - 最大安定集合が求められる
    - 安定集合 : 頂点の集合で, どの 2 点も辺で結ばれていないもの
  - 彩色数が求められる
    - 彩色数 : 辺で結ばれた頂点を同じ色で塗らないとき, 何色で塗り分けられるか
    - cograph においては彩色数は最大クリークの大きさに等しい
      - 一般には, 彩色数は最大クリークの大きさ以上

Cograph の性質

- cograph から頂点をいくつか取り除いても cograph
- 任意の極大クリークと任意の極大安定集合はちょうど 1 頂点を共有

などなど

- 文献入手法
  - cograph, LexBFS などで検索