F: flying snowman

問題概要

- N 頂点の無向完全グラフが与えられる
- だいたいの辺のコストは D
- M 本の辺についてはコストが大きい
- 頂点 0 から出発し他の頂点をすべて通って戻ってくるための最小コストを求めよ

- $2 \leq N \leq 100{,}000$
- $1 \leq M \leq N$

部分点

- 制約： $N \leq 15$

- 前処理として Floyd-Warshall 法などで各頂点対間の最短路を求める
- 今まで訪れた頂点集合と今いる頂点を状態として DP
  - $O(2^N N^2)$

- 前処理せず Dijkstra 法を使ってもよい

考察

- $M \leq N$ という怪しい制約
- N が大きいときほとんどの辺がコスト D

- 辺は N 本は必ず使うので，コスト D の辺を N 回使って全頂点を通って戻ってこられたら (つまりコスト D の辺で Hamilton 閉路が存在したら) それが最適なので答えは DN
- だいたいの場合存在しそう？

考察

- コストが高い辺が 1 頂点に集中していると面倒
- Hamilton 閉路が存在するためには 1 回入って 1 回出なければならないので，高い辺が N - 2 本以上あると無理になる

- しかしそのような頂点は N が十分大きければ高々 1 つ
- そのような頂点がなければよさそう？

定理

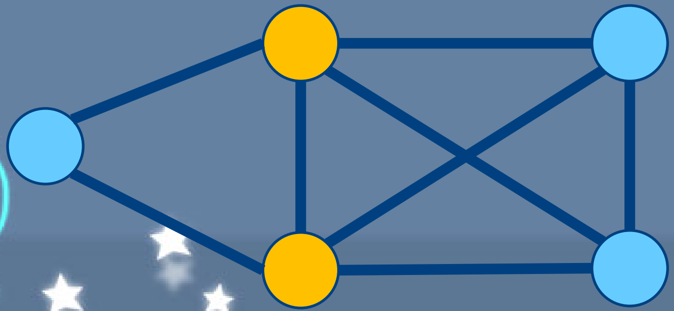
- $N \geq 8$ のとき，以下を満たす無向単純グラフには Hamilton 閉路が存在：
  - (補グラフの辺数) $\leq N$
  - (各頂点の次数) ≥ 2

- コンテスト中なら $N \geq 16$ なら大丈夫だろうと信じればよい
- 一応証明します

補題 (1)

- $N \geq 6$ のとき，以下を満たす無向単純グラフには任意の 2 点間に Hamilton 路が存在：
  - (補グラフの辺数) ≤ 2

- $N \leq 5$ だと成り立ちません



補題 (1) の証明

- 場合分けより楽な方法わからなかったので場合分けしました
  - グラフの形は 2 通りしかない

道具

- Ore の定理
- 辺で結ばれていない任意の 2 頂点 u, v に対し $\deg(u) + \deg(v) \geq$ (グラフの頂点数) ならば Hamilton 閉路が存在する
  - 頂点を適当な順に並べて，辺で結ばれていないところを入れ替えていく，という感じで証明できる

定理の証明

- Ore の定理の仮定が満たされていない場合を考えればよい
- 辺で結ばれていないある 2 頂点 u, v に対し $\deg(u) + \deg(v) \leq N - 1$ とする
- $\deg(u) + \deg(v) \geq 2(N - 2) - (N - 1) = N - 3 \geq 5$ と $\deg(u) \geq 2$, $\deg(v) \geq 2$ より，以下の少なくとも一方が成り立つ
  - 辺 ua, uc, vb, vc が存在
  - 辺 ua, ub, vc, vd が存在
    - ただし，各文字は異なる頂点を表す

定理の証明

- 辺 *ua*, *uc*, *vb*, *vc* が存在するとき
  - *u*, *v*, *c* を取り除いたグラフ上で，*a* から *b* への Hamilton 路があればよい
  - (頂点数) = *N* - 3，(辺数) ≤ 2 になる
- 辺 *ua*, *uc*, *vb*, v*d* が存在するとき
  - 辺 *ab*, *ad*, *cb*, *cd* のいずれかは存在するので，辺 *cd* が存在するとしてよい
  - *u*, *v*, *c*, *d* を取り除いたグラフ上で，*a* から *b* への Hamilton 路があればよい
  - (頂点数) = *N* - 4，(辺数) ≤ 2 になる

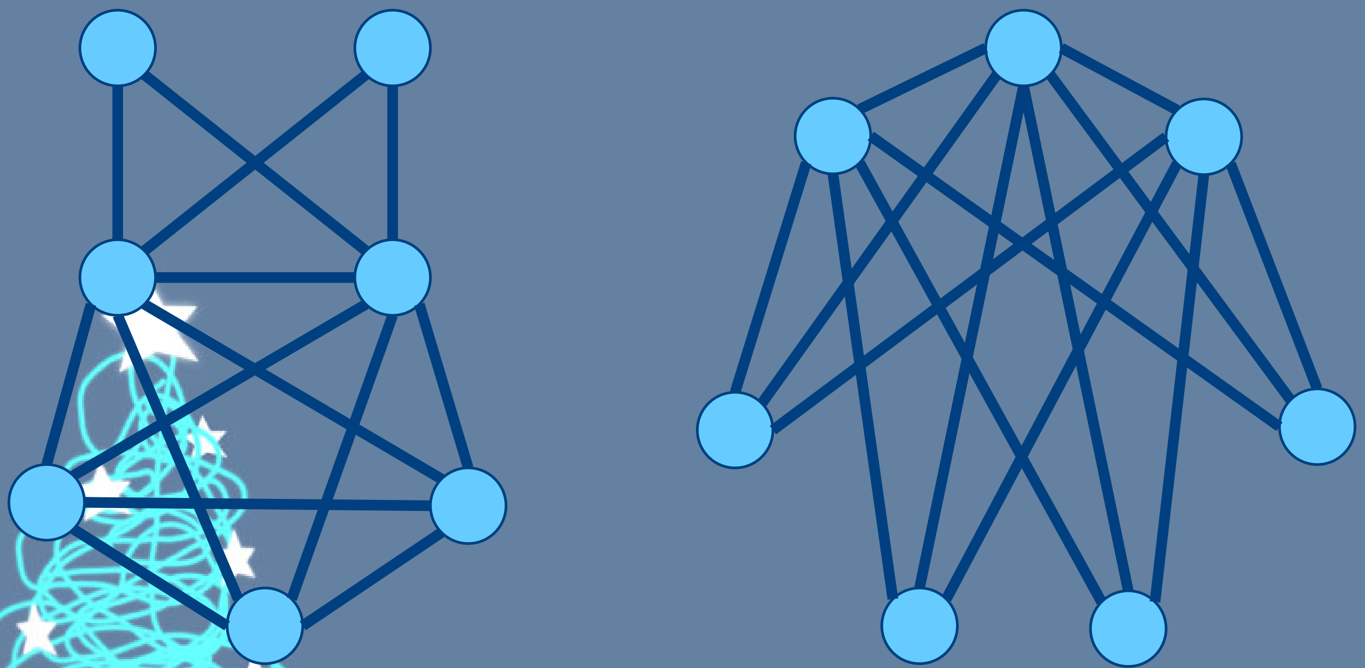
定理の証明

- というわけで，補題 (1) より $N - 4 \geq 6$ すなわち $N \geq 10$ のときは証明できた

- $N = 8, 9$ のときは Ore の定理の仮定を満たさないグラフを全部調べればよい
  - プログラム組めばなんとかなるくらいです

参考

- $N \leq 7$ だと成り立ちません



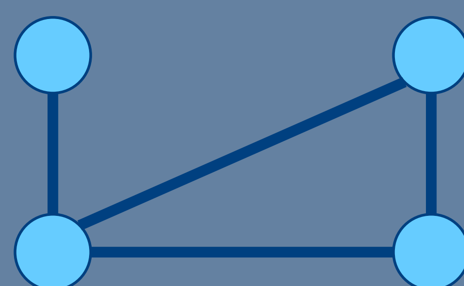
考察

- では，$N \geq 8$ として，Hamilton 閉路が存在しないときは？
- 定理より，次数 1 以下の頂点 u が存在
- u に入って出るのに使うコストの高い辺を自由に選べないだろうか
  - u を取り除いたグラフで Hamilton 路や Hamilton 閉路があればそれを使うのが最善

補題 (2)

- $N \geq 5$ のとき，以下を満たす無向単純グラフには Hamilton 閉路が存在：
  - (補グラフの辺数) ≤ 2

- $N \leq 4$ だと成り立ちません



補題 (2) の証明

- 辺で結ばれていない任意の 2 頂点 u, v に対し，$\deg(u) + \deg(v) \geq (N - 2) + (N - 2) - 1 = 2N - 5 \geq N$
- よって，Ore の定理より OK

考察

- u に入って出るのに使う辺
  - a → u → b と異なる辺を使うとき
    - u を取り除いたグラフ上で，a から b への Hamilton 路があればよい
    - (頂点数) = N - 1，(辺数) ≤ 2 になるので，補題 (1) より OK
  - a → u → a と同じ辺を 2 回使うとき
    - u を取り除いたグラフ上で，Hamilton 閉路があればよい
    - (頂点数) = N - 1，(辺数) ≤ 2 になるので，補題 (2) より OK

解法まとめ

- N が小さいときは部分点解法などで解く
- コスト D の辺がどの頂点からも 2 本以上出ていれば答えは DN
- コスト D の辺が 1 本以下な頂点 u があれば，u から出ている辺のコストを小さい順に c, c', … として，答えは次の min
  - $D(N - 2) + c + c'$
  - $D(N - 1) + 2c$
- $O(N)$

結果

- 総提出数： 107
- 提出者数： 47
- 正解者数： 14
- 最初の正解： k_operafan (01:51:36)